

## TEOREMA DELLA MAPPA DI RIEMANN

Il teorema della mappa di Riemann è un risultato importante che collega l'analisi complessa alla topologia. Vengono considerati insiemi semplicemente connessi in  $\mathbb{C}$ . Tali insiemi sono detti elementari. Intuitivamente, tali insiemi sono privi di buchi. Da un punto di vista matematico, possiamo dire che il primo gruppo fondamentale,  $\Pi_1(D)$  è banale. In questa esposizione seguiremo, in parte, l'esposizione fatta da Waugh, [W], a cui rimandiamo per maggiori dettagli e per un'accurata bibliografia. Il teorema della mappa di Riemann afferma:

**Teorema 1.** *Ogni dominio elementare  $D$  che non è  $\mathbb{C}$  è conformemente equivalente al disco  $D_1 = \{z \in \mathbb{C}/|z| < 1\}$*

**Osservazione 2.** Ricordiamo che in ogni dominio elementare ogni funzione olomorfa  $f \in \mathcal{O}(D)$  ha una primitiva olomorfa.

Introduciamo le applicazioni conformi. Seguiremo la definizione del testo [FB] che è differente da quella data da Waugh.

**Definizione 3.** Siano  $U, V$  due aperti connessi in  $\mathbb{C}$ , un'applicazione  $\phi : U \rightarrow V$  è conforme se è un isomorfismo analitico

Quindi  $\phi$  deve essere analitica, biunivoca, con inversa analitica. Usando il teorema dell'applicazione aperta, possiamo richiedere che  $\phi'(z) \neq 0$  per ogni  $z \in U$  invece di considerare l'inversa analitica.

Osserviamo che le condizioni analitica e  $\phi'(z) \neq 0$  dicono che l'applicazione è localmente iniettiva, ma non globalmente. Un tipico esempio è, appunto,  $\phi(z) = e^z$ .

Se esiste un'applicazione conforme tra due aperti connessi (per archi)  $U$  e  $V$  diremo che  $U$  e  $V$  sono conformemente equivalenti oppure conformi.

Ovviamente se  $D$  elementare è conforme a  $D'$ , allora anche  $D'$  è elementare. Vediamo che i domini elementari  $\mathbb{C}$  e  $D_1$  non sono conformi. Infatti, se lo fossero, avremmo un'applicazione analitica

$$\phi : \mathbb{C} \rightarrow D_1$$

che per il teorema di Liouville deve essere necessariamente costante.

Comunque andremo a dimostrare che tutti i domini elementari illimitati, differenti da  $\mathbb{C}$  sono conformi al disco. Il tipico esempio è il semipiano superiore  $\mathbb{H} = \{z = x + iy \in \mathbb{C}/y > 0\}$ . Verifichiamo che l'applicazione

$$\phi : \mathbb{H} \rightarrow D_1$$

data da  $\phi(z) = \frac{z-i}{z+i}$  è conforme.

Ovviamente  $\phi$  è olomorfa e ha un' inversa olomorfa data da  $\psi(w) = \frac{i(w+1)}{1-w}$ .

Prima di passare alla dimostrazione del teorema, vediamo come sono fatti i gruppi di automorfismi di domini elementari. Se  $\phi : D \rightarrow D'$  è un'applicazione conforme allora i gruppi  $Aut(D)$  e  $Aut(D')$  sono coniugati via  $\phi$ , infatti abbiamo

$$Aut(D') = \phi Aut(D) \phi^{-1}.$$

Quindi basta considerare i gruppi di automorfismi di  $\mathbb{C}$  e  $D_1$ . Abbiamo già visto che il gruppo degli automorfismi di  $D_1$  è dato dalle applicazioni

$$\phi(z) = \xi \frac{z-a}{az-1}$$

con  $\xi$  una radice dell' unità, i.e. una rotazione e  $a \in D_1$ .

Verifichiamo ora che  $Aut(\mathbb{C}) = \{\psi(z) = az + b \text{ con } a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0\}$ .

Abbiamo un' applicazione  $\psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  iniettiva e intera. Estendiamola ad un' applicazione di  $\hat{\mathbb{C}}$  in  $\hat{\mathbb{C}}$ . Per compattezza,  $\psi(\infty) = \infty$  e osserviamo che  $\infty$  non può essere una singolarità essenziale, infatti  $\psi(D_1) = U \subset \mathbb{C}$  e quindi un intorno di  $\infty$  non ha valori in  $U$ , quindi  $\psi(z)$  è polinomiale. L' iniettività ci dice che è di primo grado.

Procediamo ora alla dimostrazione del teorema: consisterà di sette passi.

- (1) Per ogni  $D \subset \mathbb{C}$ , verifichiamo che esiste  $D'$  conforme a  $D$  tale che un disco  $\Delta$  è contenuto in  $\mathbb{C} \setminus D'$ . Sia  $b \notin D$ , allora  $f(z) = z - b$  non svanisce in  $D$ , quindi in  $D$  esiste una radice quadrata  $g(z)$  di  $z - b$ , i.e.  $g(z)^2 = z - b$ .

Verifichiamo che  $g$  è iniettiva: se  $g(z_1) = g(z_2)$ , allora  $z_1 - b = g(z_1)^2 = g(z_2)^2 = z_2 - b$ , quindi  $z_1 = z_2$ . Ovviamente è suriettiva sull' immagine e  $g'(z) \neq 0$ , perché  $2g(z)g'(z) = 1$ . Allora  $D'$  è conforme a  $D$ . Inoltre  $0 \notin D'$  e se  $w \in D'$  allora  $-w \notin D'$  e la stessa affermazione è vera per un piccolo dischetto  $\Delta_w$  intorno a  $w$ , quindi  $-\Delta_w \cap D' = \emptyset$ . Prendiamo  $\Delta = \Delta_w$ .

- (2) Possiamo quindi assumere che  $D$  non interseca il disco  $D_r(a) = \{z \in \mathbb{C} / |z - a| < r\}$ . Traslando possiamo assumere che  $D$  non interseca il disco  $D_r$  centrato in 0. Consideriamo, su  $D$ , l' applicazione conforme  $\phi(z) = 1/z$ . L' applicazione estende a  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  e manda in modo conforme  $D_r \setminus \{0\}$  in  $U_{1/r} = \{z \in \mathbb{C} / |z| > 1/r\}$ . Quindi  $\phi(D) \subseteq D_{1/r}$ . Adesso Trasliamo  $\phi(D)$ , così da avere 0 nel traslato. Moltiplicando per un' opportuno costante reale, possiamo assumere che l'immagine di  $D$  è in  $D_1$ .
- (3) Il terzo passo consiste di un lemma fondamentale che risulterebbe essere falso nel caso  $D = D_1$ .

**Lemma 4.** *Sia  $D$  un dominio elementare  $D \subset D_1$ , proprio,  $0 \in D$ , esiste un'applicazione iniettiva analitica ( conforme sull' immagine)*

$$\psi : D \rightarrow D_1$$

tale che  $\psi(0) = 0$  e  $|\psi'(0)| > 1$ .

*Proof.* Sia  $a \in D_1 \setminus D$ , allora l' applicazione  $\phi_a(z) = \frac{z-a}{\bar{a}z-1}$  è un automorfismo di  $D_1$  che definisce un' applicazione conforme di  $D$  sulla sua immagine e non ha zeri su  $D$ . Quindi, in  $D$ , esiste una funzione  $H(z)$  che è una radice quadrata di  $\phi_a(z)$ .  $H(z)$  è un' applicazione conforme di  $D$  sulla sua immagine in  $D_1$  e abbiamo  $H(0) = \sqrt{a}$ , per la scelta fatta della radice quadrata. Poniamo

$$\psi(z) = \frac{H(z) - H(0)}{\overline{H(0)}H(z) - 1}.$$

Quest' applicazione è anch' essa conforme sull' immagine e  $\psi(0) = 0$ . Inoltre si ha

$$\psi'(0) = \frac{H'(0)}{\overline{H(0)}H(0) - 1}.$$

$$2H(0)H'(0) = |a|^2 - 1, \text{ quindi}$$

$$\psi'(0) = \frac{|a|^2 - 1}{2|\sqrt{a}|(1 - |a|)} = \frac{1 + |a|}{2|\sqrt{a}|} > 1,$$

poiché  $|a| < 1$ . □

Sia  $0 \in D \subset D_1$  un dominio elementare e sia

$$\mathcal{M} = \{\phi : D \rightarrow D_1, \psi(0) = 0, \text{ conformi sull' immagine}\}.$$

Assumiamo che in  $\mathcal{M}$  ci sia una  $\Phi$  con  $|\Phi'(0)|$  massimo, verifichiamo che  $\Phi$  è suriettiva e quindi un' applicazione conforme tra  $D$  e  $D_1$ .

Se  $\Phi$  non è suriettiva, applichiamo  $\psi$  come nel lemma precedente abbiamo allora che l'applicazione  $\psi \circ \Phi : D \rightarrow D_1$ , ha

$$|(\psi(\Phi))'(0)| = |\psi'(\Phi(0))\Phi'(0)| = |\psi'(\Phi(0))||\Phi'(0)| > |\Phi'(0)|$$

che contraddice la massimalità di  $|\Phi'(0)|$ .

Abbiamo quindi ridotto il problema a un problema di valore estremo, i.e. un problema variazionale.

Sia  $D$  un dominio limitato ( elementare) contenente lo 0. Esiste tra tutte le applicazioni analitiche iniettive  $\phi : D \rightarrow D_1$  con  $\phi(0) = 0$  un' applicazione con un valore massimo di  $|\phi'(0)|$ . ?

**Osservazione 5.** Non assumiamo la conformità dell' applicazione che sarà automaticamente soddisfatta.

- (4) Riassumiamo tutto ciò che dobbiamo ancora verificare. Sia  $D$  un dominio limitato (elementare) contenente lo 0. Sia

$$\mathcal{M} = \{\phi : D \rightarrow D_1, \text{ analitiche, iniettive, } \phi(0) = 0\},$$

$$M = \sup\{\phi'(0), \phi \in \mathcal{M}\}.$$

Osserviamo che  $M$  potrebbe essere anche  $\infty$ .

Sia inoltre  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n, \dots$  una successione di funzioni in  $\mathcal{M}$  tale che  $|\phi'_n(0)| \rightarrow M$  allora si pongono alcune domande

- $\{\phi_n\}$  ha una sottosuccessione uniformemente convergente?
- il limite  $\phi$  è ancora un' applicazione iniettiva?
- $\phi(D) \subset D_1$ ?

In caso di risposte affermative, avremo che il limite  $\Phi$  sarà un' applicazione analitica, iniettiva con  $|\Phi'(0)| = M$  e, pertanto, sarà finito. Inoltre, in nessun punto  $z_0$  può annullarsi la derivata, poiché intorno al punto l' applicazione non sarebbe più iniettiva (i.e. localmente sarebbe del tipo  $\xi \rightarrow \xi^n$ ,  $n \geq 2$ ). Inoltre  $\Phi$  è anche suriettiva.

- (5) Facciamo alcuni richiami dai corsi di Analisi.

**Definizione 6.** Let  $D \subset \mathbb{C}$  a domain, una successione  $\{f_n\}$  di funzioni a valori reali (complessi) converge uniformemente ad una funzione  $f$  se  $\forall \epsilon > 0$  esiste  $N > 0$  tale che  $|f(z) - f_n(z)| < \epsilon$ ,  $\forall n \geq N, z \in D$ .

La successione  $\{f_n\}$  è localmente uniformemente convergente se  $\forall a \in D$ , esiste un intorno  $a \in U_a \subset D$  tale che  $\{f_n\}$  è uniformemente convergente in  $U_a$

La successione  $\{f_n\}$  converge uniformemente sui compatti a  $f$  se converge uniformemente a  $f$  su ogni insieme compatto  $K \subset D$ .

$\{f_n\}$  è localmente uniformemente convergente a  $f$  se e solo se converge uniformemente sui compatti a  $f$ . Inoltre se  $\{f_n\}$  è una successione di funzioni continue (analitiche) che converge uniformemente sui compatti a  $f$  allora anche  $f$  lo è.

**Definizione 7.**

Una famiglia di funzioni  $\mathcal{F}$  è equicontinua su un compatto  $K$  se  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta / \forall z, w \in K, f \in \mathcal{F}, |f(z) - f(w)| < \epsilon$ , per  $|z - w| < \delta$ .

Una famiglia di funzioni  $\mathcal{F}$  è limitata uniformemente su un compatto  $K$  se esiste una costante  $M > 0$ , tale che  $f \leq M, \forall f \in \mathcal{F}$ .

**Teorema 8.** (Ascoli- Arzelà) Sia  $K \subset \mathbb{C}$  compatto,  $\mathcal{F}$  una famiglia di funzioni complesse uniformemente limitata su  $K$ , allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- $\mathcal{F}$  è equicontinua in  $K$ ;

- Ogni successione di funzioni  $\{f_n\}$  con  $f_n \in \mathcal{F}$  ha una sottosuccessione che converge uniformemente in  $K$ .

Come conseguenza della precedente discussione, abbiamo il seguente

**Teorema 9.** (Montel) Sia  $\mathcal{F}$  una famiglia di funzioni complesse che è uniformemente limitato sui compatti di  $D$ . Assumiamo  $0 \in D$ . Allora ogni successione di funzioni in  $\mathcal{F}$  ha una sottosuccessione che converge uniformemente sui compatti di  $D$

*Proof.* Sia  $r > 0$ ,  $K = \{z \in D / |z| \leq r\}$ . Poiché  $\mathcal{F}$  è una famiglia di funzioni complesse che è uniformemente limitato allora esiste  $M$  che è un limite uniforme per  $\mathcal{F}$  su  $K$ . Quindi applicando la rappresentazione di Cauchy abbiamo  $|f'(z)| \leq \frac{M}{r-\epsilon} = M'$ ,  $\forall f \in \mathcal{F}$  e  $z \in D$  tale che  $|z| < r - \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ . Allora  $\forall w, z$ , come sopra, abbiamo che  $\frac{|f(z)-f(w)|}{|z-w|} < C$  quando  $|z-w| < \delta$ . Quindi  $|f(z) - f(w)| < C|z-w|$ , i.e.  $C$  è una costante di Lipschitz  $\forall f \in \mathcal{F}$ .

Sia  $E_n = \{z \in D / |z| \leq n, \text{dist}(z, \partial D) \geq 1/n\}$ . Gli insiemi  $E_n$  sono compatti,  $E_n \subset E_{n+1}$  e  $\bigcup_{i=1}^n E_i = D$ . Allora ogni insieme compatto di  $D$  è contenuto in qualche  $E_k$ . Prendiamo  $E_1$  e applichiamo Ascoli-Arzelà: abbiamo una sottosuccessione

$f_{1,1}, f_{1,2}, \dots, f_{1,n}, \dots$  che converge uniformemente in  $E_1$ .

Da questa successione possiamo estrarre una sottosuccessione

$f_{2,1}, f_{2,2}, \dots, f_{2,n}, \dots$  che converge uniformemente in  $E_2$ .

Possiamo ripetere l'argomento per ogni  $E_k$ . Adesso la sottosuccessione

$$f_{1,1}, f_{2,2}, \dots, f_{k,k}, \dots$$

converge uniformemente in ogni  $E_n$  e quindi in ogni compatto di  $D$  □

- (6) sia  $\phi(z)$  il limite di funzioni in  $\mathcal{M} = \{\phi : D \rightarrow D_1, \text{analitiche, iniettive, } \phi(0) = 0\}$ , con  $|\phi'_n(0)| \rightarrow M$ , quindi  $|\phi'(0)| = M$ , allora  $\phi$  non è costante. Vediamo che è iniettiva. sappiamo che  $\phi(0) = 0$  supponiamo che ci sia un  $b \neq 0$  tale che  $\phi(b) = 0$ . Adesso calcoliamo l'indicatore logaritmico intorno a  $b$ . Siccome le  $\phi_n(z)$  sono olomorfe e iniettive abbiamo che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(b)} \frac{\phi'_n(z) dz}{\phi_n(z)} = 0.$$

Passando al limite abbiamo che

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(b)} \frac{\phi'(z) dz}{\phi(z)} = 1$$

che è una contraddizione. In generale se  $a \neq b$  e  $\phi(a) = \phi(b)$  ripetiamo l'argomento di prima con le funzioni  $f_n(z) = \phi_n(z) - \phi_n(a)$ .

- (7) Per costruzione  $\phi(D) \subset \overline{D_1}$ . Poiché l' applicazione è aperta abbiamo che  $\phi(D) \subseteq D_1$ . La massimalità di  $|\phi'(0)| = M$  implica la suriettività.

## REFERENCES

- [W] [W] A. Waugh *The Riemann Mapping Theorem*  
*sites.math.washington.edu/morrow*
- [FB] [FB] E. Freitag, R. Busam  
*Complex Analysis : Springer Universitext*